Devoir Surveillé : Suites Numériques & Récurrence

Niveau : Terminale Spécialité Mathématiques
Calculatrice : Autorisée (mode examen)
Durée : 1 heure 50 min
Barème : 20 points

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans la notation.

PARTIE 1 : QCM (10 points)

Consignes du QCM :
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte **2 points**, une réponse fausse ou l'absence de réponse rapporte **0 point**.
Indiquez clairement sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. **Aucune justification n'est demandée.**

Question 1 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
On souhaite démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 \times 2^n - 3$.
L'étape de l'hérédité consiste à prouver que :

A) $u_0 = 4 \times 2^0 - 3$

B) Si $u_n = 4 \times 2^n - 3$, alors $u_{n+1} = 4 \times 2^{n+1} - 3$

C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 \times 2^{n+1} - 3$

D) Si $u_{n+1} = 4 \times 2^{n+1} - 3$, alors $u_n = 4 \times 2^n - 3$

Question 2 : Soit (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 - 1 \leqslant n^2 v_n \leqslant n^2 + 3$.
D'après le théorème des gendarmes, la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est :

A) $+\infty$

B) 0

C) 1

D) On ne peut pas conclure

Question 3 : Soit (w_n) une suite géométrique de premier terme $w_0 = 5$ et de raison $q = -0{,}8$.
Que peut-on affirmer concernant la suite (w_n) ?

A) La suite est strictement décroissante.

B) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

C) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$

D) La suite n'a pas de limite.

Question 4 : Soit (a_n) une suite décroissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 2$.
Que peut-on affirmer de certitude ?

A) La suite (a_n) diverge vers $-\infty$.

B) La suite (a_n) converge vers 2.

C) La suite (a_n) est convergente, mais sa limite est supérieure ou égale à 2.

D) La suite (a_n) est croissante.

Question 5 : Soit (x_n) la suite définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si la suite (x_n) converge vers une limite finie ℓ, alors ℓ est égale à :

A) -2 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 6

PARTIE 2 : Exercice de synthèse (10 points)

Étude d'une suite définie par récurrence

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$$

1. **Calculs préliminaires :**
   - **a)** Calculer sous forme de fractions irréductibles les termes u_1 et u_2. (1 pt)
   - **b)** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n < 1$. (2,5 pts)

2. **Étude de la monotonie :**
   - **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n + 3)}{u_n + 4}$. (1 pt)
   - **b)** En déduire le sens de variation de la suite (u_n). (1 pt)

3. **Convergence :** Justifier que la suite (u_n) est convergente. (1 pt)

4. **Calcul de la limite à l'aide d'une suite auxiliaire :**
   On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
   - **a)** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$. Préviser son premier terme v_0. (1,5 pt)
   - **b)** Exprimer v_n en fonction de n. (0,5 pt)
   - **c)** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$. (1 pt)
   - **d)** En déduire la limite de la suite (u_n). (1 pt)