Devoir surveillé de mathématiques

Dénombrement

Classe de Terminale – Spécialité Mathématiques

Durée : 2 heures – Calculatrice autorisée

Les réponses doivent être justifiées : on précisera les raisonnements (principe multiplicatif, arrangements, combinaisons, passage au complémentaire, ...). Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte. Le soin et la rédaction seront valorisés.

Barème indicatif : Exercice 1 : 4 pts Exercice 2 : 4 pts Exercice 3 : 5 pts Exercice 4 : 4 pts Exercice 5 : 3 pts.

Exercice 1 (1) — 4

On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes (quatre couleurs : pique, cœur, carreau, trèfle ; huit hauteurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as). Une telle main est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ? 0,5 pt

2. Combien de mains sont constituées de cinq cartes de la même couleur ? 1 pt

3. Combien de mains contiennent *exactement* deux rois ? 1 pt

4. Combien de mains contiennent *au moins* un roi ? 1 pt

5. Combien de mains contiennent un carré (quatre cartes de même hauteur) ? 0,5 pt

Exercice 2 (2) — 4

Partie A – Le cadenas. Un cadenas possède un code formé de 4 chiffres choisis parmi $0, 1, \ldots, 9$ (un chiffre peut être répété).

1. Combien y a-t-il de codes possibles ? 0,5 pt

2. Combien y a-t-il de codes dont les quatre chiffres sont deux à deux distincts ? 0,5 pt

3. En déduire le nombre de codes comportant au moins deux chiffres identiques. 0,5 pt

4. Combien de codes contiennent *exactement* une fois le chiffre 7 ? 1 pt

Partie B – Anagrammes. On appelle anagramme du mot BANANE tout mot (ayant un sens ou non) obtenu en permutant les six lettres de BANANE.

5. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot BANANE.
Indication : on pourra choisir successivement les positions des deux lettres A, puis celles des deux lettres N. 1,5 pt

Exercice 3 (3) — 5

Une classe de Terminale compte 30 élèves : 18 filles et 12 garçons. On souhaite constituer une délégation de 4 élèves.

1. Combien de délégations différentes peut-on former ? 0,5 pt

2. Combien de délégations comportent exactement 2 filles ? 1 pt

3. Combien de délégations comportent au moins une fille ? 1 pt

4. Combien de délégations comportent au moins une fille *et* au moins un garçon ? 1 pt

Par ailleurs, la classe doit élire un bureau composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier, trois élèves *distincts*.

5. Combien de bureaux différents peut-on former ? 0,5 pt

6. Combien de bureaux possibles ont pour présidente une fille ? 1 pt

Exercice 4 (4) — 4

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments.

1. Rappeler la formule du binôme de Newton. En l'appliquant à $(1+1)^n$ puis à $(1-1)^n$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

1 pt

2. En déduire que E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair, puis que ce nombre commun vaut 2^{n-1}. 1 pt

3. Démontrer que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

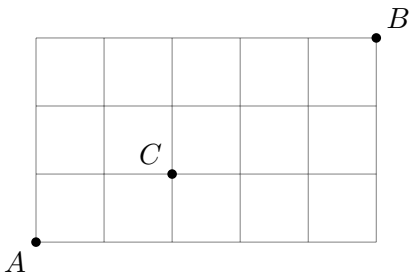
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

1 pt

4. En déduire la valeur de la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. 1 pt

Exercice 5 (5) — 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(0\,;0)$, $B(5\,;3)$ et $C(2\,;1)$. On appelle *chemin* une ligne brisée allant de A à B, formée de segments de longueur 1 le long des lignes du quadrillage, chaque segment étant dirigé soit vers la droite, soit vers le haut.



1. Justifier qu'un chemin de A à B est entièrement déterminé par le choix des positions des pas « vers le haut » parmi les 8 pas, puis calculer le nombre de chemins de A à B. 1 pt

2. Combien de chemins de A à B passent par le point C ? 1 pt

3. En déduire le nombre de chemins de A à B ne passant pas par C. 1 pt

Fin du sujet