Suites et raisonnement par récurrence

Série d'exercices — Terminale spécialité mathématiques

*Niveau : * application directe, ** intermédiaire, *** approfondissement.*

Énoncés

Exercice 1 (*) — Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On pose $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. Étudier le sens de variation de (u_n) puis déterminer sa limite.

4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 2 (*) — Démonstrations par récurrence

1. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et conjecturer une expression de u_n.

b) Démontrer cette conjecture par récurrence.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

3. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 3 (**) — Inégalité de Bernoulli et limites de q^n

1. Soit $a > 0$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

2. En déduire que si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

3. En déduire que si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

4. Justifier qu'il existe un entier n tel que $1{,}01^n > 10^6$.

Exercice 4 (**) — Suite homographique

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est arithmétique.

3. En déduire l'expression de u_n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 (***) — Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}.$$

En déduire que (u_n) est croissante.

4. Justifier que (u_n) converge puis déterminer sa limite ℓ.

5. Question bonus. Démontrer par récurrence que $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. On pourra utiliser l'égalité $1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$.

Exercice 6 (***) — Une suite de sommes majorée

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

3. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

4. Conclure que (u_n) converge et que sa limite ℓ vérifie $\ell \leqslant 2$.

Exercice 7 (**) — Modélisation et algorithmique

Une ville compte 20 000 habitants en 2025. Chaque année, 5 % des habitants quittent la ville et 1 200 nouveaux habitants s'y installent. On note p_n la population en $2025 + n$.

1. Justifier que $p_{n+1} = 0{,}95\,p_n + 1200$ et donner p_0.

2. On pose $w_n = p_n - 24\,000$. Montrer que (w_n) est géométrique et en déduire p_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de (p_n) et l'interpréter.

4. Résoudre algébriquement l'inéquation $p_n > 23\,000$.

5. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $p_n > 23\,000$:

```
def seuil():
    n = 0
    p = 20000
    while ............:
        p = ............
        n = n + 1
    return n
```

Corrigés

Corrigé de l'exercice 1 — Suite arithmético-géométrique

1. $u_1 = \dfrac{1}{2} \times 10 + 3 = 8$ et $u_2 = \dfrac{1}{2} \times 8 + 3 = 7$.

2. **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \tfrac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \tfrac{1}{2}u_n - 3 = \tfrac{1}{2}(u_n - 6) = \tfrac{1}{2}v_n.$$

(v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 4$.

b) $v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $u_n = 6 + 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 6 + \dfrac{4}{2^n}$.

3. $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\dfrac{2}{2^n} < 0$: (u_n) est strictement décroissante.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

4. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(6 + 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right) = 6(n+1) + 4 \cdot \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$, d'où

$$S_n = 6(n+1) + 8\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 6n + 14 - \frac{8}{2^{n+1}}.$$

Corrigé de l'exercice 2 — Démonstrations par récurrence

1. **a)** $u_1 = 1 + 3 = 4$, $u_2 = 4 + 5 = 9$, $u_3 = 9 + 7 = 16$, $u_4 = 16 + 9 = 25$. On conjecture $u_n = (n+1)^2$.

b) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = (n+1)^2$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 = (0+1)^2$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2,$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

2. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $7^n - 1$ est divisible par 6 ».

Initialisation. $7^0 - 1 = 0 = 6 \times 0$: vraie.

Hérédité. Supposons $7^n - 1 = 6k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7(7^n - 1) + 6 = 7 \times 6k + 6 = 6(7k+1),$$

donc $7^{n+1} - 1$ est divisible par 6.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6 \mid 7^n - 1$.

3. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $2^n \geqslant n^2$ » pour $n \geqslant 4$.

Initialisation. $2^4 = 16 = 4^2$: $\mathcal{P}(4)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 4$ tel que $2^n \geqslant n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2n^2$. Or

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geqslant 9 - 2 > 0 \quad \text{car } n \geqslant 4.$$

Donc $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

Conclusion. Pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

Corrigé de l'exercice 3 — Inégalité de Bernoulli

1. *Initialisation.* $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \cdot a$: vraie.
Hérédité. Supposons $(1+a)^n \geqslant 1+na$. Comme $1+a>0$:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geqslant (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a.$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

2. Si $q>1$, on pose $a = q-1 > 0$. Alors $q^n \geqslant 1+na$ et $\lim_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$ car $a>0$. Par comparaison, $\lim q^n = +\infty$.

3. Si $0<q<1$, alors $\frac{1}{q} > 1$, donc $\left(\frac{1}{q}\right)^n \to +\infty$ d'après la question précédente. Ainsi $q^n = \dfrac{1}{(1/q)^n} \to 0$.

4. Avec $a = 0{,}01$: $1{,}01^n \geqslant 1 + 0{,}01\,n$, et $1 + 0{,}01\,n > 10^6$ dès que $n > 999\,999 \times 100$. Par exemple $n = 10^8$ convient : $1{,}01^{10^8} \geqslant 1 + 10^6 > 10^6$.

Corrigé de l'exercice 4 — Suite homographique

1. *Initialisation.* $u_0 = 1 > 0$.
Hérédité. Si $u_n > 0$, alors $1+u_n > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} > 0$.
Donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Comme $u_n > 0$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est bien définie et

$$v_{n+1} = \frac{1+u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 1 = v_n + 1.$$

(v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = 1$.

3. $v_n = 1+n$, donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Corrigé de l'exercice 5 — Suite récurrente

1. $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2. *Initialisation.* $u_0 = 0 \in [0,2]$.
Hérédité. Si $0 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors $2 \leqslant 2+u_n \leqslant 4$. La fonction racine carrée étant croissante, $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

3. On multiplie et on divise par la quantité conjuguée :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \frac{(2+u_n) - u_n^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n} = \frac{(2-u_n)(1+u_n)}{\sqrt{2+u_n} + u_n},$$

car $2 + x - x^2 = (2-x)(1+x)$. D'après la question 2, $2-u_n \geqslant 0$ et $1+u_n > 0$; le dénominateur est strictement positif. Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: (u_n) est croissante.

4. (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge (théorème de convergence monotone) vers un réel $\ell \in [0,2]$. La fonction $x \mapsto \sqrt{2+x}$ étant continue, ℓ vérifie $\ell = \sqrt{2+\ell}$, soit $\ell^2 = \ell + 2$ avec $\ell \geqslant 0$, c'est-à-dire $\ell^2 - \ell - 2 = (\ell-2)(\ell+1) = 0$. Donc $\ell = 2$.

5. *Initialisation.* $2\cos\frac{\pi}{2} = 0 = u_0$.
Hérédité. Supposons $u_n = 2\cos\theta$ avec $\theta = \dfrac{\pi}{2^{n+1}} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \sqrt{4\cos^2\tfrac{\theta}{2}} = 2\left|\cos\tfrac{\theta}{2}\right| = 2\cos\tfrac{\theta}{2},$$

car $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{\theta}{2} \geqslant 0$. Or $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}$: la propriété est héréditaire.
On retrouve ainsi $\ell = \lim 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = 2\cos 0 = 2$.

Corrigé de l'exercice 6 — Suite de sommes majorée

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$: (u_n) est strictement croissante.

2. Pour $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2} \quad \text{car } k(k-1) \leqslant k^2.$$

3. Pour $n \geqslant 2$, en sommant l'inégalité précédente pour k de 2 à n (télescopage) :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n}.$$

Pour $n = 1$: $u_1 = 1 = 2 - \frac{1}{1}$: l'inégalité est vraie.

4. (u_n) est croissante et majorée par 2 : elle converge, et par passage à la limite dans $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$, sa limite vérifie $\ell \leqslant 2$.

Corrigé de l'exercice 7 — Modélisation et algorithmique

1. Il reste $100\% - 5\% = 95\%$ des habitants, donc $p_{n+1} = 0{,}95\, p_n + 1200$, avec $p_0 = 20\,000$.

2. $w_{n+1} = p_{n+1} - 24\,000 = 0{,}95\, p_n + 1200 - 24\,000 = 0{,}95\, p_n - 22\,800 = 0{,}95\,(p_n - 24\,000) = 0{,}95\, w_n$. (w_n) est géométrique de raison 0,95 et de premier terme $w_0 = -4000$. Donc $w_n = -4000 \times 0{,}95^n$ et

$$p_n = 24\,000 - 4000 \times 0{,}95^n.$$

3. Comme $0 < 0{,}95 < 1$, $0{,}95^n \to 0$, donc $\lim p_n = 24\,000$: à long terme, la population se stabilise autour de 24 000 habitants.

4.

$$p_n > 23\,000 \iff 4000 \times 0{,}95^n < 1000 \iff 0{,}95^n < 0{,}25 \iff n \ln(0{,}95) < \ln(0{,}25).$$

Comme $\ln(0{,}95) < 0$: $n > \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}95} \approx 27{,}03$. Le plus petit entier est $n = 28$ (donc en 2053).

5.

```
def seuil():
    n = 0
    p = 20000
    while p <= 23000:
        p = 0.95 * p + 1200
        n = n + 1
    return n
```

La fonction renvoie `28`.