LYCÉE FRANÇAIS INTERNATIONAL
LOUIS-MASSIGNON

DEVOIR SURVEILLÉ – DS BILAN 2

Terminale spécialité mathématiques

Durée : 60 minutes **Note : .../20**

L'usage de la calculatrice en mode examen est autorisé.

Exercice 1 : Vrai ou faux (6 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Les trois questions sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

On pose

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Affirmation 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{2}.$$

2. On considère une suite (S_n) vérifiant, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$4n - 5 \leq S_n \leq 4n + 5.$$

On définit

$$u_n = \frac{S_n}{n}.$$

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge vers 4.

3. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_1 = 2, \qquad v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}, \quad n \geq 1.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{n+1}{n}.$$

Exercice 2 : Étude d'une suite (14 points)

Dans un laboratoire, on étudie la quantité d'une substance présente dans un récipient. À l'instant initial, cette quantité est de $0,5$ mg.
Toutes les heures, $20\,\%$ de la quantité présente sont éliminés, puis on ajoute $0,6$ mg de cette substance.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, présente dans le récipient au bout de n heures. Ainsi, $u_0 = 0,5$.

1. Calculer la quantité u_1 présente dans le récipient au bout d'une heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = 0,8u_n + 0,6.$$
3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$u_n \leq u_{n+1} < 3.$$
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. On définit la suite (v_n) par
$$v_n = 3 - u_n.$$
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 3 - 2,5 \times 0,8^n.$$
   c. La quantité de substance ne doit jamais dépasser 3 mg. D'après le modèle étudié, cette limite est-elle dépassée ? Justifier la réponse.