LYCÉE FRANÇAIS INTERNATIONAL
LOUIS-MASSIGNON

DEVOIR SURVEILLÉ

Trigonométrie

Durée : 1 heure Note : /20

Nom et prénom : .....

Consignes : Les réponses doivent être justifiées. Les résultats exacts sont attendus, sauf indication contraire.

Exercice 1 : Angles et cercle trigonométrique /5 points

1. Convertir en radians les angles suivants :

$$30°, \qquad 135°, \qquad 300°.$$

(1,5 pt)

2. Déterminer la mesure principale dans $]-\pi\,;\,\pi]$ de chacun des angles :

$$\frac{17\pi}{6}, \qquad -\frac{11\pi}{4}, \qquad \frac{7\pi}{3}.$$

(2,25 pts)

3. Donner deux mesures du même angle que $\dfrac{2\pi}{5}$, l'une positive et l'autre négative. (1,25 pt)

Exercice 2 : Valeurs remarquables /5 points

1. Déterminer les valeurs exactes suivantes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right), \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

(2 pts)

2. Sachant que

$$\sin(x) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[,$$

calculer $\cos(x)$. (1,5 pt)

3. Simplifier l'expression suivante :

$$A = \sin^2(x) + \cos^2(x) + 3\sin^2(x).$$

(1,5 pt)

Exercice 3 : Équations trigonométriques /5 points

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes.

1. $$\cos(x) = \frac{1}{2}.$$

(1,5 pt)

2. $$\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(1,5 pt)

3. $$2\cos^2(x) - 1 = 0.$$

(2 pts)

Bon courage !

CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Devoir surveillé : Trigonométrie

Exercice 1 : Angles et cercle trigonométrique

1. Conversion en radians

On utilise la correspondance $180° = \pi$ radians.

$$30° = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$$135° = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$$

$$300° = \boxed{\frac{5\pi}{3}}$$

2. Mesures principales

La mesure principale appartient à $]-\pi\,;\,\pi]$. On ajoute ou retranche des multiples de 2π.

Pour $\dfrac{17\pi}{6}$:

$$\frac{17\pi}{6} - 2\pi = \frac{17\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = \boxed{\frac{5\pi}{6}}.$$

Pour $-\dfrac{11\pi}{4}$:

$$-\frac{11\pi}{4} + 4\pi = -\frac{11\pi}{4} + \frac{16\pi}{4} = \boxed{\frac{5\pi}{4}}.$$

Or $\dfrac{5\pi}{4} > \pi$. Il faut donc retrancher 2π :

$$\frac{5\pi}{4} - 2\pi = \boxed{-\frac{3\pi}{4}}.$$

Pour $\dfrac{7\pi}{3}$:

$$\frac{7\pi}{3} - 2\pi = \boxed{\frac{\pi}{3}}.$$

3. Mesures du même angle

Les mesures d'un même angle diffèrent d'un multiple entier de 2π.

$$\frac{2\pi}{5} + 2\pi = \boxed{\frac{12\pi}{5}}$$

et

$$\frac{2\pi}{5} - 2\pi = \boxed{-\frac{8\pi}{5}}.$$

Exercice 2 : Valeurs remarquables

1. Valeurs exactes

Les valeurs remarquables et la parité donnent :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boxed{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}}$$

2. Calcul de $\cos(x)$

On sait que :

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Donc

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Comme $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(x) > 0$. Ainsi,

$$\boxed{\cos(x) = \frac{4}{5}}.$$

3. Simplification

$$A = \sin^2(x) + \cos^2(x) + 3\sin^2(x).$$

En utilisant $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$A = 1 + 3\sin^2(x).$$

Ainsi,

$$\boxed{A = 1 + 3\sin^2(x)}.$$

Exercice 3 : Équations trigonométriques

On cherche les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$.

1. Équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Sur le cercle trigonométrique, le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ pour les angles $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ dans l'intervalle considéré.

Donc

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3}\right\}}.$$

2. Équation $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

L'angle de référence est $\dfrac{\pi}{4}$. Le sinus est négatif dans les troisième et quatrième quadrants.

Dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, on obtient :

$$x = -\frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3\pi}{4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3\pi}{4}\,;\,-\frac{\pi}{4}\right\}}.$$

3. Équation $2\cos^2(x) - 1 = 0$

On transforme l'équation :

$$2\cos^2(x) - 1 = 0 \iff \cos^2(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dans $]-\pi\,;\,\pi]$, les solutions sont

$$-\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{3\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}}.$$

Fin du corrigé