AS : 2026/2027

DEVOIR SURVEILLÉ

Polynômes du second degré

Durée : 1 heure Note : /20

Nom et prénom : .....

Consignes : La rédaction et la justification des réponses seront prises en compte. Toute réponse doit être accompagnée des calculs nécessaires.

Exercice 1 : Factorisation et signe /5 points

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 3.$$

1. Calculer $P(3)$. En déduire une factorisation de $P(x)$ sous la forme
$$P(x) = (x-3)(ax+b).$$
(1,5 points)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. **(1 points)**
3. Étudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x. **(1,5 points)**
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$$2x^2 - 5x - 3 \leq 0.$$
(1 points)

Exercice 2 : Forme canonique /5 points

On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(x) = x^2 - 6x + 5.$$

1. Montrer que
$$Q(x) = (x-3)^2 - 4.$$
(1,5 points)
2. En déduire le minimum de Q sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de x pour laquelle il est atteint. **(1 points)**
3. Factoriser $Q(x)$, puis résoudre l'équation $Q(x) = 0$. **(1 points)**
4. Résoudre l'inéquation $Q(x) > 0$. **(1,5 points)**

Exercice 3 : Développement, factorisation et inéquation /5 points

On considère l'expression :

$$R(x) = (x-1)(2x+3) - (x-1)(x-4).$$

1. Factoriser $R(x)$ sans développer les produits. **(1,5 points)**
2. Développer et réduire $R(x)$. **(1 points)**
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $R(x) = 0$. **(1 points)**
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $R(x) \geq 0$. **(1,5 points)**

Exercice 4 : Étude d'une fonction polynôme /5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 4x + 5.$$

1. Montrer que
$$f(x) = -(x-2)^2 + 9.$$
(1 points)
2. En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et préciser en quelle valeur il est atteint. **(1 points)**
3. Factoriser $f(x)$, puis résoudre l'équation $f(x) = 0$. **(1,5 points)**
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$. **(1,5 points)**

Bon courage !

CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Devoir surveillé : Polynômes

Exercice 1

1. Factorisation de P.

Calculons :

$$P(3) = 2 \times 3^2 - 5 \times 3 - 3 = 18 - 15 - 3 = 0.$$

Donc 3 est une racine de P. On peut écrire

$$P(x) = (x-3)(ax+b).$$

En développant :

$$P(x) = ax^2 + (b-3a)x - 3b.$$

Par identification avec $2x^2 - 5x - 3$, on obtient $a = 2$ et $b = 1$. Ainsi,

$$\boxed{P(x) = (x-3)(2x+1)}.$$

2. Résolution de $P(x) = 0$.

$$(x-3)(2x+1) = 0$$

donc

$$x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 1 = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}}.$$

3. Signe de $P(x)$.

Les racines sont $-\frac{1}{2}$ et 3. Le coefficient de x^2 étant positif, le polynôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3
	$+\infty$				
$x-3$	$-$		$-$		0
	$+$				
$2x+1$	$-$		0		$+$
	$+$				
$P(x)$	$+$		0	$-$	0
	$+$				

4. Résolution de l'inéquation.

On cherche $P(x) \leq 0$. D'après le tableau de signe,

$$\boxed{S = \left[-\frac{1}{2}\,;\, 3\right]}.$$

Exercice 2

1. Forme canonique.

On complète le carré :

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 - 6x + 5 \\ &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 5 \\ &= (x-3)^2 - 4. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{Q(x) = (x-3)^2 - 4}.$$

2. Minimum de Q.

Pour tout réel x, on a $(x-3)^2 \geq 0$. Donc

$$Q(x) = (x-3)^2 - 4 \geq -4.$$

L'égalité est atteinte lorsque $x = 3$. Ainsi, le minimum de Q est

$$\boxed{-4, \text{ atteint pour } x = 3}.$$

3. Factorisation et équation.

On utilise une différence de deux carrés :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-3)^2 - 2^2 \\ &= (x-3-2)(x-3+2). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{Q(x) = (x-5)(x-1)}.$$

L'équation $Q(x) = 0$ donne

$$(x-5)(x-1) = 0,$$

d'où

$$\boxed{x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 5}.$$

4. Résolution de $Q(x) > 0$.

Le coefficient de x^2 est positif. Le polynôme est donc strictement positif à l'extérieur des racines 1 et 5.

Par conséquent,

$$\boxed{S =]-\infty\,;\,1[\cup]5\,;\,+\infty[}.$$

Exercice 3

1. Factorisation de R.

On remarque le facteur commun $(x-1)$:

$$\begin{aligned} R(x) &= (x-1)(2x+3) - (x-1)(x-4) \\ &= (x-1)\big[(2x+3) - (x-4)\big] \\ &= (x-1)(2x+3-x+4). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{R(x) = (x-1)(x+7)}.$$

2. Développement et réduction.

$$\begin{aligned} R(x) &= (x-1)(x+7) \\ &= x^2 + 7x - x - 7. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{R(x) = x^2 + 6x - 7}.$$

3. Résolution de $R(x) = 0$.

$$(x-1)(x+7) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -7}.$$

4. Résolution de $R(x) \geq 0$.

Le coefficient de x^2 est positif. Le polynôme est positif ou nul à l'extérieur des racines -7 et 1.

Par conséquent,

$$\boxed{S =]-\infty\,;\,-7] \,\cup\, [1\,;\,+\infty[}.$$

Exercice 4

1. Forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 5 \\ &= -(x^2 - 4x) + 5 \\ &= -\big[(x-2)^2 - 4\big] + 5 \\ &= -(x-2)^2 + 4 + 5. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f(x) = -(x-2)^2 + 9}.$$

2. Maximum de f.

Puisque $(x-2)^2 \geq 0$, on a

$$-(x-2)^2 \leq 0.$$

Ainsi,

$$f(x) = -(x-2)^2 + 9 \leq 9.$$

L'égalité est atteinte pour $x = 2$. Donc

$$\boxed{\max_{\mathbb{R}} f = 9, \text{ atteint pour } x = 2}.$$

3. Factorisation et équation.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 5 \\ &= -(x^2 - 4x - 5) \\ &= -(x-5)(x+1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = -(x-5)(x+1)}.$$

Résolvons $f(x) = 0$:

$$-(x-5)(x+1) = 0.$$

Donc

$$\boxed{x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -1}.$$

4. Résolution de $f(x) \geq 0$.

Le coefficient de x^2 est négatif. Le polynôme est donc positif ou nul entre ses deux racines.

Par conséquent,

$$\boxed{S = [-1\,;\,5]}.$$

Fin du corrigé