Les lignes trigonométriques

Cours complet – Première spécialité mathématiques

octobre 2026
prof. Outouzzalt

Table des matières

1 Angles et mesure en radians **3**
1.1 Degrés et radians . . . 3
1.2 Mesure principale et angles orientés . . . 3

2 Le cercle trigonométrique **3**
2.1 Définition . . . 3
2.2 Définition du cosinus et du sinus . . . 4
2.3 Les quadrants et les signes . . . 4

3 Valeurs remarquables **5**
3.1 Comment retrouver les valeurs remarquables ? . . . 5

4 L'identité fondamentale **5**

5 Parité et périodicité **6**
5.1 Parité . . . 6
5.2 Périodicité . . . 6

6 Formules des angles associés **6**
6.1 Angle opposé . . . 6
6.2 Angles $\pi - x$ et $\pi + x$ . . . 6
6.3 Angles $2\pi - x$ . . . 7
6.4 Angles complémentaires . . . 7

7 Résoudre une équation trigonométrique **7**
7.1 Équation $\cos x = \cos a$ . . . 7
7.2 Équation $\sin x = \sin a$ . . . 8
7.3 Méthode générale sur un intervalle . . . 8
7.4 Autres exemples corrigés . . . 8

8 Méthodes de calcul et rédaction **8**

8.1 Calculer une valeur exacte 8
8.2 Réduire un angle modulo 2π 9
8.3 Rédaction attendue 9

9 Erreurs fréquentes à éviter **9**

10 Exercices **10**

11 Corrigés détaillés **10**

Fiche de révision : l'essentiel **11**

1 Angles et mesure en radians

1.1 Degrés et radians

Un angle peut être mesuré en degrés ou en radians. Une révolution complète mesure 360°, ce qui correspond à 2π radians. Ainsi :

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ radians}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{360^\circ = 2\pi \text{ radians}}.$$

Pour convertir une mesure en degrés en radians, on multiplie par $\dfrac{\pi}{180}$:

$$\boxed{x_{\text{rad}} = x_{\text{deg}} \times \frac{\pi}{180}}.$$

Pour convertir une mesure en radians en degrés, on multiplie par $\dfrac{180}{\pi}$:

$$\boxed{x_{\text{deg}} = x_{\text{rad}} \times \frac{180}{\pi}}.$$

Exemples.

$$45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}, \qquad 150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\frac{7\pi}{6} \text{ radians} = \frac{7\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 210^\circ.$$

1.2 Mesure principale et angles orientés

Sur le cercle trigonométrique, on peut tourner plusieurs fois autour du cercle. Deux mesures qui diffèrent d'un multiple entier de 2π correspondent au même point :

$$x \quad \text{et} \quad x + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Par exemple, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{7\pi}{3}$ et $-\dfrac{5\pi}{3}$ correspondent au même point du cercle.

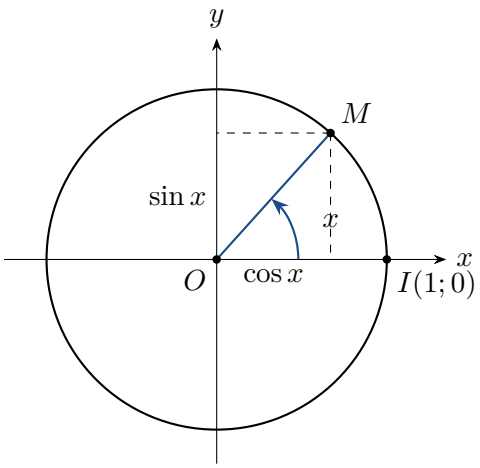
Pour ramener un angle à une mesure située dans un intervalle usuel, on ajoute ou on retranche des multiples de 2π. Il faut toujours préciser l'intervalle demandé par l'exercice.

2 Le cercle trigonométrique

2.1 Définition

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, muni d'un sens positif inverse à celui des aiguilles d'une montre, dans un repère orthonormé.

À tout réel x, on associe un point M du cercle en partant du point $I(1\,;0)$ et en parcourant un angle orienté de mesure x radians.



2.2 Définition du cosinus et du sinus

Si M est le point associé au réel x, ses coordonnées sont :

$$\boxed{M(\cos x\,;\,\sin x)}.$$

Ainsi :

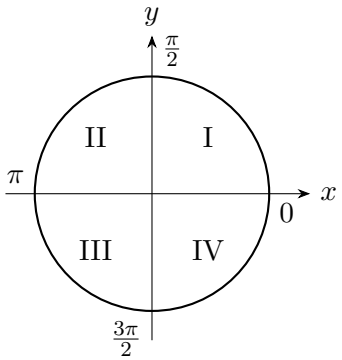
— $\cos x$ est l'abscisse de M ;

— $\sin x$ est l'ordonnée de M.

Le cosinus et le sinus sont définis pour tout réel x.

2.3 Les quadrants et les signes

Les axes partagent le cercle en quatre quadrants.



Quadrant	Intervalle type	Signe de $\cos x$	Signe de $\sin x$
I	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$+$	$+$
II	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$-$	$+$
III	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$-$	$-$
IV	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$+$	$-$

Sur les axes, l'une des deux coordonnées est nulle. Par exemple :

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\pi = -1, \quad \sin\pi = 0.$$

3 Valeurs remarquables

Les valeurs exactes suivantes sont à connaître et à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Valeurs supplémentaires :

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Et :

$$\cos(2\pi) = 1, \qquad \sin(2\pi) = 0.$$

3.1 Comment retrouver les valeurs remarquables ?

On peut les retrouver à l'aide de deux triangles usuels :

— triangle rectangle isocèle : angles de 45°, donc $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$;

— triangle rectangle dont les côtés sont proportionnels à 1, $\sqrt{3}$ et 2 : angles de 30° et 60°, donc $\sin(\pi/6) = 1/2$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$.

Les signes des valeurs dans les autres quadrants se déduisent de la position du point sur le cercle.

4 L'identité fondamentale

Le point $M(\cos x\,;\sin x)$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1. L'équation de ce cercle est $X^2 + Y^2 = 1$. Par conséquent :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}.$$

Cette égalité est appelée **identité trigonométrique fondamentale**. Ici, $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$, et $\sin^2 x$ signifie $(\sin x)^2$.

On en déduit :

$$\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}.$$

Comme les coordonnées d'un point du cercle unité sont comprises entre -1 et 1, on a :

$$\boxed{-1 \leq \cos x \leq 1} \qquad \text{et} \qquad \boxed{-1 \leq \sin x \leq 1}.$$

Exemple. On sait que $\cos x = \dfrac{3}{5}$. Alors :

$$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Donc $\sin x = \dfrac{4}{5}$ ou $\sin x = -\dfrac{4}{5}$. Le signe se détermine grâce au quadrant de x.

On ne peut pas choisir automatiquement le signe + lors de l'extraction d'une racine carrée : le sinus et le cosinus peuvent être négatifs.

5 Parité et périodicité

5.1 Parité

Le cosinus est une fonction paire :

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x}.$$

Le sinus est une fonction impaire :

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}.$$

Ces relations se comprennent par les symétries du cercle trigonométrique. Elles permettent de simplifier les expressions contenant un angle négatif.

Exemples :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

5.2 Périodicité

Un tour complet correspond à 2π. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\cos(x + 2k\pi) = \cos x} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(x + 2k\pi) = \sin x}.$$

Le sinus et le cosinus sont donc périodiques de période 2π.

Exemple.

$$\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6 Formules des angles associés

Les angles associés permettent de calculer des valeurs exactes sans utiliser de calculatrice.

6.1 Angle opposé

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x}, \qquad \boxed{\sin(-x) = -\sin x}.$$

6.2 Angles $\pi - x$ et $\pi + x$

$$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos x}, \qquad \boxed{\sin(\pi - x) = \sin x},$$
$$\boxed{\cos(\pi + x) = -\cos x}, \qquad \boxed{\sin(\pi + x) = -\sin x}.$$

6.3 Angles $2\pi - x$

$$\boxed{\cos(2\pi - x) = \cos x}, \qquad \boxed{\sin(2\pi - x) = -\sin x}.$$

6.4 Angles complémentaires

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x}, \qquad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x}.$$

Exemple 1.

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{6} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\cos\frac{\pi}{6}\\ &= \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}.\end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\begin{aligned}\sin\frac{7\pi}{4} &= \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}.\end{aligned}$$

7 Résoudre une équation trigonométrique

Résoudre une équation trigonométrique consiste à trouver tous les réels x qui vérifient une égalité faisant intervenir $\cos x$ ou $\sin x$.

7.1 Équation $\cos x = \cos a$

Sur le cercle trigonométrique, deux angles ont le même cosinus lorsqu'ils correspondent à des points ayant la même abscisse. Pour $a \in \mathbb{R}$, les solutions sont :

$$\boxed{x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}.$$

On écrit aussi $x = 2k\pi \pm a$.

Exemple. Résoudre $\cos x = \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$.

On sait que $\cos(\pi/3) = 1/2$. Ainsi :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}.$$

Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, cela donne :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{3}}.$$

7.2 Équation $\sin x = \sin a$

Deux angles ont le même sinus lorsqu'ils correspondent à des points ayant la même ordonnée. Pour $a \in \mathbb{R}$, les solutions sont :

$$\boxed{x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}.$$

Exemple. Résoudre $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$.

L'angle de référence est $\pi/4$. Le sinus est positif dans les quadrants I et II :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{4}}.$$

7.3 Méthode générale sur un intervalle

Pour résoudre une équation trigonométrique :

1. Repérer la valeur remarquable ou l'angle de référence.
2. Placer les points correspondants sur le cercle.
3. Utiliser le signe et la symétrie pour trouver les angles possibles.
4. Ajouter les multiples de 2π si l'on cherche les solutions dans $\mathbb{R}$.
5. Si l'énoncé impose un intervalle, ne conserver que les solutions qui appartiennent à cet intervalle.

7.4 Autres exemples corrigés

Exemple A : résoudre $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0; 2\pi]$.

Le cosinus est négatif dans les quadrants II et III. L'angle de référence est $\pi/4$. Donc :

$$\boxed{x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{4}}.$$

Exemple B : résoudre $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$.

Le sinus est négatif dans les quadrants III et IV. L'angle de référence est $\pi/6$. Donc :

$$\boxed{x = \frac{7\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6}}.$$

8 Méthodes de calcul et rédaction

8.1 Calculer une valeur exacte

Pour calculer $\cos(11\pi/6)$, on remarque que :

$$\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}.$$

Donc :

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

De même :

$$\sin\frac{11\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

8.2 Réduire un angle modulo 2π

Pour simplifier un angle, on cherche à écrire celui-ci sous la forme $a + 2k\pi$, où a est un angle plus simple.

Exemple :

$$\frac{17\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi :

$$\sin\frac{17\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8.3 Rédaction attendue

Une bonne rédaction indique :

- la formule ou la propriété utilisée ;
- le calcul de l'angle associé ;
- le signe approprié ;
- la valeur exacte finale, simplifiée.

Exemple de rédaction :

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{4} &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\sin\frac{\pi}{4}\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

9 Erreurs fréquentes à éviter

1. **Confondre sinus et cosinus.** Le cosinus est l'abscisse ; le sinus est l'ordonnée.
2. **Oublier le signe.** Une valeur remarquable peut être positive ou négative selon le quadrant.
3. **Oublier la période.** Pour toutes les solutions réelles, il faut faire apparaître $k \in \mathbb{Z}$.
4. **Ne pas respecter l'intervalle.** Une solution générale n'est pas nécessairement dans l'intervalle demandé.
5. **Confondre les notations.** $\cos^2 x = (\cos x)^2$, tandis que $\cos(x^2)$ est le cosinus du nombre x^2.
6. **Choisir un signe au hasard.** Si $\sin^2 x = c$, alors $\sin x = \pm\sqrt{c}$ lorsque $c \geq 0$; le quadrant décide du signe.

10 Exercices

Exercice 1 – Conversions.

a) Convertir 30°, 135° et 315° en radians.

b) Convertir $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$ en degrés.

Exercice 2 – Valeurs remarquables. Calculer exactement :

$$\cos\frac{2\pi}{3}, \quad \sin\frac{5\pi}{4}, \quad \cos\frac{7\pi}{6}, \quad \sin\frac{11\pi}{6}.$$

Exercice 3 – Angles associés. Simplifier les expressions :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right), \quad \sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 4 – Identité fondamentale.

a) On sait que $\sin x = \dfrac{5}{13}$. Déterminer les valeurs possibles de $\cos x$.

b) Si x appartient au premier quadrant, quelle valeur de $\cos x$ faut-il retenir ?

Exercice 5 – Équations sur un intervalle. Résoudre sur $[0;2\pi]$:

$$\text{a) } \cos x = -\frac{1}{2}, \qquad \text{b) } \sin x = \frac{1}{2}, \qquad \text{c) } \cos x = 0, \qquad \text{d) } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 6 – Équations dans $\mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{b) } \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 7 – Vrai ou faux ? Justifier.

a) $\cos(-x) = -\cos x$.

b) $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

c) Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

d) L'équation $\cos x = 2$ possède une solution réelle.

11 Corrigés détaillés

Exercice 1.

a) $30° = \dfrac{\pi}{6}$, $135° = \dfrac{3\pi}{4}$, $315° = \dfrac{7\pi}{4}$.

b) $\dfrac{2\pi}{3} = 120°$, $\dfrac{7\pi}{4} = 315°$, $\dfrac{5\pi}{6} = 150°$.

Exercice 2.

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3.

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 4.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Ainsi $\cos x = \pm\frac{12}{13}$. Si x appartient au premier quadrant, le cosinus est positif :

$$\boxed{\cos x = \frac{12}{13}}.$$

Exercice 5.

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$: $\boxed{x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3}}$.

b) $\sin x = \frac{1}{2}$: $\boxed{x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6}}$.

c) $\cos x = 0$: $\boxed{x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}}$.

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\boxed{x = \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3}}$.

Exercice 6.

a)

$$\boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}}.$$

b)

$$\boxed{x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}.$$

Exercice 7.

a) Faux : le cosinus est pair, donc $\cos(-x) = \cos x$.

b) Vrai : le sinus est périodique de période 2π.

c) Vrai : c'est l'identité fondamentale.

d) Faux : $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc le cosinus ne peut pas être égal à 2.

Fiche de révision : l'essentiel

Coordonnées sur le cercle :

$$M(\cos x\,;\,\sin x).$$

Identité fondamentale :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}.$$

Parité :

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x}, \qquad \boxed{\sin(-x) = -\sin x}.$$

Périodicité :

$$\boxed{\cos(x+2k\pi)=\cos x}, \qquad \boxed{\sin(x+2k\pi)=\sin x}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Équations fondamentales :

$$\cos x=\cos a \iff x=a+2k\pi \text{ ou } x=-a+2k\pi,$$

$$\sin x=\sin a \iff x=a+2k\pi \text{ ou } x=\pi-a+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Conseil final : pour les valeurs exactes et les équations, dessiner un cercle trigonométrique, repérer le quadrant, déterminer le signe, puis utiliser les valeurs remarquables.