SÉRIE D'EXERCICES : DÉNOMBREMENT

Terminale – Spécialité Mathématiques

Objectifs

Cette série permet de travailler :
- les principes additif et multiplicatif ;
- les factorielles et les permutations ;
- les arrangements et les combinaisons ;
- les problèmes de dénombrement et les probabilités.

Consigne générale : pour chaque exercice, justifier la méthode de dénombrement utilisée et détailler les calculs.

Partie A – Principes fondamentaux

Exercice 1 – Principe multiplicatif

Un élève possède 5 pantalons, 4 chemises et 3 paires de chaussures.

a) Combien de tenues différentes peut-il composer en choisissant un pantalon, une chemise et une paire de chaussures ?

b) Il dispose également de 2 vestes différentes. Combien de tenues peut-il maintenant composer en portant obligatoirement une veste ?

Exercice 2 – Codes numériques

On considère des codes constitués de 4 chiffres choisis parmi les chiffres de 0 à 9.

a) Combien de codes peut-on former si les répétitions sont autorisées ?

b) Combien de codes peut-on former si les quatre chiffres doivent être distincts ?

c) Combien de codes peut-on former si le premier chiffre doit être non nul et si les répétitions sont autorisées ?

d) Combien de codes peut-on former si le premier chiffre doit être non nul et si les quatre chiffres doivent être distincts ?

Exercice 3 – Factorielle

Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{9!}{7!}, \qquad B = \frac{10!}{8!\,2!},$$

$$C = \frac{12!}{9!}, \qquad D = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}, \quad n \geq 1.$$

Partie B – Permutations et arrangements

Exercice 4 – Rangement de livres

On dispose de 7 livres différents que l'on souhaite ranger sur une étagère.

a) Combien de rangements différents peut-on obtenir ?

b) Deux livres particuliers, notés A et B, doivent être placés côte à côte. Combien de rangements sont possibles ?

c) Les livres A et B ne doivent pas être placés côte à côte. Combien de rangements sont possibles ?

Exercice 5 – Podium d'une compétition

Une compétition réunit 10 participants.

a) Combien de podiums différents peut-on obtenir en attribuant les médailles d'or, d'argent et de bronze ?

b) Combien de podiums peut-on obtenir si un participant particulier, nommé Ali, doit obligatoirement figurer sur le podium ?

c) Combien de podiums peut-on obtenir si Ali ne peut pas être classé premier ?

Exercice 6 – Constitution d'un bureau

Une association compte 12 membres. On souhaite désigner un président, un secrétaire et un trésorier.

a) Combien de bureaux peut-on constituer si personne ne peut cumuler deux fonctions ?

b) Combien de bureaux peut-on constituer si le président est déjà désigné et si les deux autres fonctions restent à attribuer à des personnes différentes ?

c) Combien de bureaux peut-on constituer si deux membres particuliers refusent d'occuper simultanément des fonctions dans le même bureau ?

Exercice 7 – Arrangements et conditions

Avec les chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, on forme des nombres de 4 chiffres distincts.

a) Combien de nombres peut-on former ?

b) Combien de nombres pairs peut-on former ?

c) Combien de nombres strictement supérieurs à 5000 peut-on former ?

d) Combien de nombres pairs strictement supérieurs à 5000 peut-on former ?

Partie C – Combinaisons

Exercice 8 – Choix d'une équipe

Une classe compte 15 élèves. On veut constituer un groupe de 5 élèves.

a) Combien de groupes différents peut-on former ?

b) Deux élèves, Sara et Yassine, ne souhaitent pas être dans le même groupe. Combien de groupes sont possibles ?

c) Sara et Yassine doivent obligatoirement faire partie du groupe. Combien de groupes peut-on former ?

Exercice 9 – Comité de sélection

Un établissement compte 8 professeurs de mathématiques et 6 professeurs de physique. On veut constituer un comité de 5 personnes.

a) Combien de comités peut-on former sans condition ?

b) Combien de comités comportent exactement 3 professeurs de mathématiques ?

c) Combien de comités comportent au moins un professeur de physique ?

d) Combien de comités comportent au moins 2 professeurs de mathématiques ?

Exercice 10 – Tirage de cartes

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

a) Combien de mains différentes peut-on obtenir ?

b) Combien de mains contiennent exactement 3 as ?

c) Combien de mains ne contiennent aucun as ?

d) Combien de mains contiennent au moins un as ?

Partie D – Problèmes de synthèse

Exercice 11 – Délégation de classe

Une classe compte 18 élèves, dont 10 filles et 8 garçons. On souhaite choisir une délégation de 4 élèves.

a) Combien de délégations peut-on former ?

b) Combien de délégations comportent exactement 2 filles et 2 garçons ?

c) Combien de délégations comportent au moins une fille ?

d) Combien de délégations comportent au moins 3 filles ?

Exercice 12 – Mots formés avec des lettres

On considère les lettres distinctes A, B, C, D, E, F, G.

a) Combien de mots de 5 lettres distinctes peut-on former ?

b) Combien de mots de 5 lettres distinctes commencent par une voyelle, sachant que les voyelles considérées sont A et E ?

c) Combien de mots de 5 lettres distinctes contiennent simultanément A et B ?

Exercice 13 – Probabilités et dénombrement

Une urne contient 6 boules rouges, 4 boules bleues et 2 boules vertes. On tire simultanément 3 boules, sans remise.

a) Déterminer le nombre total de tirages possibles.

b) Déterminer le nombre de tirages contenant exactement 2 boules rouges.

c) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 boules rouges.

d) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur.

Exercice 14 – Dénombrement et complémentaire

Dans un groupe de 12 personnes, on souhaite former un comité de 4 personnes.

a) Combien de comités peut-on former ?

b) Deux personnes, A et B, ne doivent pas appartenir simultanément au comité. Combien de comités sont possibles ?

c) Reprendre la question précédente en utilisant le dénombrement par complémentaire.

Exercice 15 – Problème de synthèse

Un établissement dispose de 9 candidats pour constituer une équipe de 4 élèves. Parmi eux, 3 sont des élèves de Terminale spécialité mathématiques et 6 sont des élèves d'autres spécialités.

a) Combien d'équipes de 4 élèves peut-on former ?

b) Combien d'équipes comportent exactement 2 élèves de spécialité mathématiques ?

c) Combien d'équipes comportent au moins un élève de spécialité mathématiques ?

d) Combien d'équipes comportent davantage d'élèves de spécialité mathématiques que d'élèves des autres spécialités ?

CORRIGÉ DES EXERCICES

Les résultats sont accompagnés des principales étapes de calcul.

Corrigé de l'exercice 1

a) Par le principe multiplicatif :

$$5 \times 4 \times 3 = \boxed{60}.$$

b) Avec une veste obligatoire :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = \boxed{120}.$$

Corrigé de l'exercice 2

a) Répétitions autorisées :

$$10^4 = \boxed{10\,000}.$$

b) Chiffres distincts :

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = \boxed{5040}.$$

c) Premier chiffre non nul :

$$9 \times 10^3 = \boxed{9000}.$$

d) Premier chiffre non nul et chiffres distincts :

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = \boxed{4536}.$$

Corrigé de l'exercice 3

$$A = \frac{9!}{7!} = 9 \times 8 = \boxed{72}.$$

$$B = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10 \times 9}{2} = \boxed{45}.$$

$$C = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = \boxed{1320}.$$

$$D = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \boxed{n(n+1)}.$$

Corrigé de l'exercice 4

a)

$$7! = \boxed{5040}.$$

b) On considère A et B comme un bloc. Il y a alors 6 objets à ranger, et deux ordres possibles à l'intérieur du bloc :

$$2 \times 6! = \boxed{1440}.$$

c) Par complémentaire :

$$7! - 2 \times 6! = 5040 - 1440.$$

Donc

$$\boxed{3600}.$$

Corrigé de l'exercice 5

a)
$$10 \times 9 \times 8 = \boxed{720}.$$

b) Ali figure sur le podium. On choisit sa place de 3 façons, puis les deux autres participants :
$$3 \times 9 \times 8 = \boxed{216}.$$

c) Ali ne peut pas être premier :
$$9 \times 9 \times 8 = \boxed{648}.$$

Corrigé de l'exercice 6

a)
$$12 \times 11 \times 10 = \boxed{1320}.$$

b) Le président étant fixé :
$$11 \times 10 = \boxed{110}.$$

c) Il y a au total 1320 bureaux. Les bureaux où les deux membres particuliers occupent tous les deux une fonction sont au nombre de
$$3 \times 2 \times 10 = 60,$$
car on attribue deux fonctions distinctes aux deux membres, puis la troisième à un autre membre. Ainsi,
$$1320 - 60 = \boxed{1260}.$$

Corrigé de l'exercice 7

a)
$$8 \times 7 \times 6 \times 5 = \boxed{1680}.$$

b) Le chiffre des unités est pair : 2, 4, 6 ou 8. Puis on choisit les trois autres chiffres :
$$4 \times 7 \times 6 \times 5 = \boxed{840}.$$

c) Le chiffre des milliers est 5, 6, 7 ou 8 :
$$4 \times 7 \times 6 \times 5 = \boxed{840}.$$

d) Si le chiffre des milliers est pair, il y a 3 choix parmi 6 et 8 ; si ce chiffre est impair, il y a 2 choix parmi 5 et 7, puis 4 choix pour le chiffre des unités.
$$2 \times 4 \times 6 \times 5 + 2 \times 4 \times 6 \times 5 = \boxed{480}.$$

Corrigé de l'exercice 8

a)
$$155 = \boxed{3003}.$$

b) On retire les groupes contenant Sara et Yassine :
$$155 - 133 = 3003 - 286 = \boxed{2717}.$$

c) Sara et Yassine étant imposés, il reste à choisir 3 élèves parmi les 13 autres :
$$133 = \boxed{286}.$$

Corrigé de l'exercice 9

a)
$$145 = \boxed{2002}.$$

b)
$$8362 = 56 \times 15 = \boxed{840}.$$

c) On retire les comités constitués uniquement de professeurs de mathématiques :
$$145 - 85 = 2002 - 56 = \boxed{1946}.$$

d) Exactement 2, 3 ou 4 professeurs de mathématiques :
$$8263 + 8362 + 8461.$$
$$420 + 840 + 420 = \boxed{1680}.$$

Corrigé de l'exercice 10

a)
$$325 = \boxed{201\,376}.$$

b) Choisir 3 as parmi 4 et 2 autres cartes parmi les 28 cartes non as :
$$43282 = 4 \times 378 = \boxed{1512}.$$

c)
$$285 = \boxed{98\,280}.$$

d) Par complémentaire :
$$325 - 285 = 201\,376 - 98\,280.$$
Donc
$$\boxed{103\,096}.$$

Corrigé de l'exercice 11

a)
$$184 = \boxed{3060}.$$

b)
$$10282 = 45 \times 28 = \boxed{1260}.$$

c)
$$184 - 84 = 3060 - 70 = \boxed{2990}.$$

d) Exactement 3 filles ou 4 filles :
$$10381 + 104 = 960 + 210 = \boxed{1170}.$$

Corrigé de l'exercice 12

a)
$$A_7^5 = \frac{7!}{2!} = \boxed{2520}.$$

b) Deux choix pour la première lettre, puis un arrangement de 4 lettres parmi les 6 restantes :
$$2 \times A_6^4 = 2 \times 360 = \boxed{720}.$$

c) On place A et B dans deux des cinq positions : 52 choix. On choisit et ordonne ensuite trois lettres parmi les cinq restantes :
$$52 \times A_5^3 = 10 \times 60 = \boxed{600}.$$

Corrigé de l'exercice 13

a)
$$123 = \boxed{220}.$$

b)
$$6261 = 15 \times 6 = \boxed{90}.$$

c)
$$P(\text{exactement 2 rouges}) = \frac{90}{220} = \boxed{\frac{9}{22}}.$$

d) Trois boules de même couleur :
$$63 + 43 + 23.$$
Comme $23 = 0$, le nombre de tirages favorables vaut
$$20 + 4 + 0 = 24.$$
Ainsi,
$$P(\text{même couleur}) = \frac{24}{220} = \boxed{\frac{6}{55}}.$$

Corrigé de l'exercice 14

a)
$$124 = \boxed{495}.$$

b) Les comités interdits contiennent simultanément A et B. On choisit alors les deux autres membres parmi les 10 personnes restantes :
$$102 = 45.$$
Le nombre de comités autorisés est
$$495 - 45 = \boxed{450}.$$

c) On retrouve le même résultat par complémentaire :
$$124 - 102 = \boxed{450}.$$

Corrigé de l'exercice 15

a)
$$94 = \boxed{126}.$$

b)
$$3262 = 3 \times 15 = \boxed{45}.$$

c) Par complémentaire :
$$94 - 64 = 126 - 15 = \boxed{111}.$$

d) Il faut avoir 3 élèves de spécialité mathématiques et 1 autre élève, ou les 3 élèves de spécialité mathématiques et un élève parmi les 6 autres :
$$3361 = \boxed{6}.$$