CHAPITRE : LE DÉNOMBREMENT

Terminale – Spécialité Mathématiques

Table des matières

1 Introduction au dénombrement **3**

2 Les principes fondamentaux **3**

2.1 Principe additif . . . 3

2.2 Principe multiplicatif . . . 3

3 La factorielle d'un entier **4**

4 Les permutations **5**

4.1 Définition et formule . . . 5

4.2 Remarque importante . . . 5

5 Les arrangements sans répétition **6**

5.1 Définition . . . 6

5.2 Démonstration de la formule . . . 6

6 Les combinaisons **7**

6.1 Définition . . . 7

6.2 Pourquoi diviser par $p!$? . . . 7

7 Propriétés des coefficients binomiaux **8**

7.1 Valeurs aux extrémités . . . 8

7.2 Symétrie . . . 9

7.3 Relation de Pascal . . . 9

8 Dénombrement et tirages **9**

9 Le lien avec les probabilités **10**

10 Méthode générale de résolution **11**

11 Exercices d'application **11**

12 Corrigé des exercices **12**

1 Introduction au dénombrement

Le **dénombrement** consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini, sans nécessairement les énumérer un par un.

Il intervient notamment dans les problèmes de tirages, de choix de groupes, de codes, de classements et de probabilités.

Exemple introductif

Une classe compte 12 élèves. On souhaite choisir un délégué.
Chaque élève peut être choisi. Il existe donc

$$\boxed{12 \text{ choix possibles.}}$$

Si l'on souhaite maintenant choisir un délégué et un suppléant, les deux rôles étant différents, le nombre de possibilités change : l'ordre des rôles est important.

2 Les principes fondamentaux

2.1 Principe additif

Principe additif

Si une situation peut se réaliser de p façons ou de q façons, et si ces deux possibilités s'excluent mutuellement, alors elle peut se réaliser de

$$\boxed{p+q \text{ façons.}}$$

Exemple 1

Dans une bibliothèque, un élève peut emprunter un roman parmi 8 romans ou une bande dessinée parmi 5 bandes dessinées.
S'il choisit un seul ouvrage, le nombre de choix possibles est

$$8+5=\boxed{13}.$$

2.2 Principe multiplicatif

Principe multiplicatif

Si une première étape peut être réalisée de p façons et si, pour chacun de ces choix, une seconde étape peut être réalisée de q façons, alors les deux étapes peuvent être réalisées successivement de

$$\boxed{p \times q \text{ façons.}}$$

Exemple 2

Un élève possède 4 pantalons et 3 chemises. Il souhaite composer une tenue avec un pantalon et une chemise.
Le nombre de tenues possibles est

$$4 \times 3 = \boxed{12}.$$

Exemple 3 : un code

Un code est constitué de 4 chiffres. Chaque chiffre peut être choisi parmi les dix chiffres de 0 à 9, et les répétitions sont autorisées.
Pour chaque position, il y a 10 possibilités. Ainsi, le nombre de codes est

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = \boxed{10^4 = 10\,000}.$$

3 La factorielle d'un entier

Définition

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit la factorielle de n par

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \times 1.}$$

Par convention :

$$\boxed{0! = 1.}$$

Quelques valeurs à connaître :

$$0! = 1,$$
$$1! = 1,$$
$$2! = 2,$$
$$3! = 6,$$
$$4! = 24,$$
$$5! = 120,$$
$$6! = 720.$$

Pour $n \geq 1$, on a également

$$\boxed{n! = n(n-1)!}.$$

Exemple 4

Simplifier l'expression

$$A = \frac{8!}{6!}.$$

On utilise $8! = 8 \times 7 \times 6!$:

$$A = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = \boxed{56}.$$

Exemple 5

Calculer

$$B = \frac{10!}{8! \times 2!}.$$

On simplifie par 8! :

$$B = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = \boxed{45}.$$

4 Les permutations

4.1 Définition et formule

Permutation

Une permutation de n objets distincts est un classement de ces n objets dans un certain ordre.
Le nombre de permutations de n objets distincts est

$$\boxed{P_n = n!}.$$

Exemple 6

De combien de façons peut-on placer 5 livres différents sur une étagère ?
Le premier livre peut être choisi de 5 façons, le deuxième de 4 façons, puis les suivants de 3, 2 et 1 façons.
Ainsi,

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = \boxed{120}.$$

4.2 Remarque importante

Dans une permutation, on utilise tous les objets et leur ordre compte.

Par exemple, les arrangements ABC et BAC sont différents, car les positions des lettres ne sont pas les mêmes.

5 Les arrangements sans répétition

5.1 Définition

Arrangement

Un arrangement de p objets parmi n objets distincts est un choix ordonné de p objets distincts parmi les n objets disponibles.
On suppose $0 \leq p \leq n$. Le nombre d'arrangements est

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}.$$

5.2 Démonstration de la formule

Pour construire un arrangement de p objets parmi n objets :

- le premier objet peut être choisi de n façons ;
- le deuxième de $n-1$ façons ;
- le troisième de $n-2$ façons ;
- et ainsi de suite ;
- le p-ième de $n-p+1$ façons.

D'après le principe multiplicatif,

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

En multipliant et en divisant par $(n-p)!$, on obtient

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}.$$

Exemple 7 : un podium

Lors d'une compétition réunissant 8 participants, on attribue les médailles d'or, d'argent et de bronze.
Combien de podiums différents peut-on obtenir ?
L'ordre compte puisque les trois places sont différentes. Aucun participant ne peut occuper deux places.
On calcule donc

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!}.$$

Ainsi,

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = \boxed{336}.$$

Exemple 8 : un bureau

Dans une association de 10 membres, on désigne un président, un secrétaire et un trésorier.
Une même personne ne peut occuper qu'un seul poste.
Le nombre de bureaux possibles est

$$A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = \boxed{720}.$$

À retenir

On utilise les arrangements lorsque :

— on choisit seulement p objets parmi n ;

— l'ordre des objets choisis est important ;

— aucun objet ne peut être choisi deux fois.

6 Les combinaisons

6.1 Définition

Combinaison

Une combinaison de p objets parmi n objets distincts est un choix de p objets sans tenir compte de l'ordre.
Le nombre de combinaisons de p objets parmi n est le coefficient binomial :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}.$$

On suppose $0 \leq p \leq n$.

6.2 Pourquoi diviser par $p!$?

Dans un arrangement, les mêmes p objets peuvent être ordonnés de $p!$ façons.

Lorsqu'on ne tient pas compte de l'ordre, ces $p!$ classements correspondent à une seule combinaison. On obtient donc

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}.$$

Exemple 9 : choisir une équipe

On souhaite constituer une équipe de 3 élèves parmi 8 élèves.
L'ordre des élèves n'a aucune importance : choisir Alice, Bilal et Sara revient au même que choisir Sara, Alice et Bilal.
Le nombre d'équipes est

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!}.$$

Ainsi,

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{56}.$$

Exemple 10 : tirer des cartes

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 5 cartes.
Le nombre de mains possibles est

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{5! \times 27!}.$$

Donc

$$\binom{32}{5} = \boxed{201\,376}.$$

À retenir

On utilise les combinaisons lorsque :

- on choisit p objets parmi n ;
- l'ordre ne compte pas ;
- chaque objet ne peut être choisi qu'une fois.

7 Propriétés des coefficients binomiaux

Pour tous entiers $n \geq 0$ et $0 \leq p \leq n$, on dispose des propriétés suivantes.

7.1 Valeurs aux extrémités

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}.$$

Il existe une seule façon de ne rien choisir et une seule façon de choisir les n objets.

7.2 Symétrie

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}.$$

Choisir p objets parmi n revient à déterminer les $n-p$ objets qui ne sont pas choisis.

Exemple 11

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7}.$$

En effet,

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \boxed{120}.$$

7.3 Relation de Pascal

Pour $1 \leq p \leq n-1$,

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}}.$$

Cette relation permet de calculer les coefficients binomiaux sans utiliser systématiquement les factorielles.

Exemple 12

Calculons $\binom{6}{2}$ à l'aide de la relation de Pascal :

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2}.$$

Or

$$\binom{5}{1} = 5, \qquad \binom{5}{2} = 10.$$

Ainsi,

$$\boxed{\binom{6}{2} = 15}.$$

8 Dénombrement et tirages

Dans les exercices, il faut distinguer plusieurs situations.

Situation	Ordre	Formule
Permutation de n objets	Important, tous les objets sont utilisés	$n!$
Arrangement de p parmi n	Important, sans répétition	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$
Combinaison de p parmi n	Sans importance, sans répétition	$\binom{n}{p}$
Suite de p choix parmi n possibilités	Les positions comptent, répétitions autorisées	n^p

Exemple 13 : choisir le bon modèle

On dispose de 6 chiffres distincts.

1. Former un code de 4 chiffres, avec répétition autorisée :

$$6^4 = \boxed{1296}.$$

2. Former un code de 4 chiffres distincts :

$$A_6^4 = \frac{6!}{2!} = \boxed{360}.$$

3. Choisir un groupe de 4 chiffres parmi les 6, sans tenir compte de l'ordre :

$$\binom{6}{4} = \boxed{15}.$$

9 Le lien avec les probabilités

Le dénombrement permet de calculer des probabilités lorsque les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables.

Probabilité d'un événement

Si l'univers Ω est fini et si toutes les issues sont équiprobables, alors pour tout événement E :

$$\boxed{P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)}}.$$

Exemple 14

On tire simultanément 2 cartes dans un jeu de 32 cartes. On cherche la probabilité d'obtenir 2 as.
Il y a 4 as dans le jeu. Le nombre de tirages possibles de 2 cartes est

$$\binom{32}{2} = \frac{32 \times 31}{2} = 496.$$

Le nombre de tirages de 2 as est

$$\binom{4}{2} = 6.$$

La probabilité cherchée est donc

$$P(E) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{6}{496}.$$

Ainsi,

$$\boxed{P(E) = \frac{3}{248}}.$$

10 Méthode générale de résolution

Les questions à se poser

Devant un problème de dénombrement, procéder dans l'ordre suivant :

1. **Que cherche-t-on à compter ?** Des classements, des codes, des équipes ou des tirages ?
2. **Combien d'objets sont disponibles ?** Noter ce nombre n.
3. **Combien d'objets choisit-on ?** Noter ce nombre p si nécessaire.
4. **L'ordre compte-t-il ?** Un podium est ordonné ; une équipe ne l'est pas.
5. **Les répétitions sont-elles autorisées ?** Un chiffre peut éventuellement apparaître plusieurs fois dans un code, contrairement à un tirage de cartes sans remise.
6. **Choisir la formule adaptée**, puis effectuer les calculs et rédiger une conclusion.

11 Exercices d'application

Exercice 1 – Principes de dénombrement

Une tenue est constituée d'un pantalon, d'un tee-shirt et d'une paire de chaussures. On dispose de 4 pantalons, 5 tee-shirts et 3 paires de chaussures.

a) Combien de tenues différentes peut-on composer ?
b) Combien de codes de 3 chiffres peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 si les répétitions sont autorisées ?

Exercice 2 – Factorielle et permutations

a) Calculer $\dfrac{9!}{7!}$.

b) De combien de façons peut-on ranger 6 livres différents sur une étagère ?

Exercice 3 – Arrangements

Une course réunit 9 coureurs.

a) Combien de podiums différents peut-on obtenir ?

b) Combien de façons peut-on attribuer les postes de président, secrétaire et trésorier à 9 personnes, sans cumul de fonctions ?

Exercice 4 – Combinaisons

a) Combien de groupes de 4 élèves peut-on former dans une classe de 12 élèves ?

b) Dans un jeu de 32 cartes, combien de mains de 5 cartes peut-on obtenir ?

Exercice 5 – Probabilités

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules bleues, indiscernables au toucher. On tire simultanément 2 boules, sans remise.

a) Déterminer le nombre total de tirages possibles.

b) Déterminer le nombre de tirages donnant deux boules rouges.

c) Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges.

12 Corrigé des exercices

Exercice 1

a) Par le principe multiplicatif :

$$4 \times 5 \times 3 = \boxed{60}.$$

b) Les répétitions étant autorisées :

$$10^3 = \boxed{1000}.$$

Exercice 2

a)

$$\frac{9!}{7!} = 9 \times 8 = \boxed{72}.$$

b)

$$6! = \boxed{720}.$$

Exercice 3

a) L'ordre compte :

$$A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = \boxed{504}.$$

b)

$$A_9^3 = \boxed{504}.$$

Exercice 4

a)
$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \times 8!} = \boxed{495}.$$

b)
$$\binom{32}{5} = \boxed{201\,376}.$$

Exercice 5

a) Le nombre total de tirages est
$$\binom{8}{2} = \boxed{28}.$$

b) Le nombre de tirages de deux boules rouges est
$$\binom{5}{2} = \boxed{10}.$$

c) Les tirages étant équiprobables :
$$P(\text{deux rouges}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}.$$

Ainsi,
$$\boxed{P(\text{deux rouges}) = \frac{5}{14}}.$$