30 septembre 2026
DS Bilan 1

Durée de l'épreuve : **60 minutes**
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Exercice 1 : 6 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{2n + \sin(n)}{n+1}$$

Affirmation 1 : La suite (v_n) diverge.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on a $u_n = n^2$.

3. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+1} = -0,8t_n + 18.$$

Affirmation 3 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

Exercice 2 : 14 points

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 mL d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en mL présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_{n+1} = 2 + 0,8u_n.$$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2.
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ?
   Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```
1  def mystere(k) :
2      n = 1
3      s = 2
4      while s < k :
5          n = n + 1
6          s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7      return n
```

   Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle valeur de n, on a : $S_n > 10$.