RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE ET SUITES NUMÉRIQUES

Cours de Terminale – Spécialité mathématiques
septembre 2026

Table des matières

1 Le raisonnement par récurrence **2**
1.1 Principe de la récurrence . . . 2
1.2 Exemple 1 : somme des premiers entiers . . . 2
1.3 Exemple 2 : inégalité . . . 3
1.4 Exemple 3 : expression d'une suite . . . 3

2 Généralités sur les suites numériques **3**
2.1 Définition et modes de génération . . . 3
2.2 Sens de variation . . . 4
2.3 Suite majorée, minorée, bornée . . . 4

3 Suites arithmétiques et géométriques **4**
3.1 Suites arithmétiques . . . 4
3.2 Suites géométriques . . . 5
3.3 Limites usuelles . . . 5

4 Suites définies par récurrence **5**
4.1 Étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 5
4.2 Exemple : suite croissante et majorée . . . 6
4.3 Exemple : suite décroissante et minorée . . . 6

5 Limites et théorèmes de convergence **7**
5.1 Théorème de convergence monotone . . . 7
5.2 Théorèmes de comparaison . . . 7
5.3 Suite définie par une fonction . . . 7

6 Méthode de rédaction au baccalauréat **7**

7 Exercices d'application **7**

1 Le raisonnement par récurrence

1.1 Principe de la récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété est vraie pour tous les entiers naturels à partir d'un certain rang.

Définition

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel $n \geq n_0$. Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

1. **Initialisation :** on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité :** on suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$ fixé, puis on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
3. **Conclusion :** on affirme que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Méthode

Dans la rédaction, il faut faire apparaître explicitement les trois étapes. Lors de l'hérédité, on suppose uniquement la propriété au rang n et on s'en sert pour établir la propriété au rang $n+1$.

1.2 Exemple 1 : somme des premiers entiers

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple corrigé

On note $P(n)$ la propriété

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation : pour $n = 1$, on a $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. La propriété est vraie au rang 1.
Hérédité : supposons que, pour un entier $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

C'est précisément la formule au rang $n+1$.
Conclusion : par récurrence, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

1.3 Exemple 2 : inégalité

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $2^n \geq n+1$.

Exemple corrigé

Posons $P(n) : 2^n \geq n+1$.
Initialisation : pour $n = 0$, $2^0 = 1 = 0+1$.
Hérédité : supposons $2^n \geq n+1$. En multipliant par $2 > 0$,

$$2^{n+1} \geq 2(n+1) = 2n+2.$$

Or $2n+2 \geq n+2$ car $n \geq 0$. Donc

$$2^{n+1} \geq n+2.$$

La propriété est héréditaire.
Conclusion : pour tout entier $n \geq 0$, $2^n \geq n+1$.

1.4 Exemple 3 : expression d'une suite

On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^{n+2} - 1$.

Exemple corrigé

Initialisation : pour $n = 0$, $2^{0+2} - 1 = 4 - 1 = 3 = u_0$.
Hérédité : supposons $u_n = 2^{n+2} - 1$. Alors

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^{n+2} - 1) + 1 = 2^{n+3} - 1.$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^{n+2} - 1$.

2 Généralités sur les suites numériques

2.1 Définition et modes de génération

Définition

Une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, ou sur une partie de $\mathbb{N}$, à valeurs réelles. Le terme de rang n est noté u_n.

Une suite peut être définie :

- **Explicitement :** $u_n = f(n)$. Exemple : $u_n = 3n - 2$.
- **Par récurrence :** on donne un premier terme et une relation entre deux termes consécutifs. Exemple : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

2.2 Sens de variation

Propriété

Pour étudier les variations d'une suite (u_n), on peut comparer u_{n+1} et u_n :

- si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n, la suite est croissante ;
- si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n, la suite est décroissante ;
- si $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout n, elle est constante.

Lorsque tous les termes sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n.$$

Exemple corrigé

Soit $u_n = n^2 - 3n$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3(n+1) - (n^2 - 3n) = 2n - 2.$$

Pour $n \geq 1$, cette différence est positive ou nulle. La suite est donc croissante à partir du rang 1.

2.3 Suite majorée, minorée, bornée

Définition

Une suite (u_n) est :

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n ;
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$ pour tout n ;
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Propriété

Une suite croissante et majorée converge. Une suite décroissante et minorée converge. Ces résultats sont fondamentaux pour étudier les suites définies par récurrence.

3 Suites arithmétiques et géométriques

3.1 Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r.}$$

Son terme général est

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

si le premier terme est u_0, ou $u_n = u_1 + (n-1)r$ si le premier terme est u_1.

La somme de termes consécutifs est

$$\boxed{\text{Somme} = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}.}$$

3.2 Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est géométrique de raison q si

$$\boxed{u_{n+1} = q\,u_n.}$$

Son terme général est

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}$$

si le premier terme est u_0, ou $u_n = u_1 q^{n-1}$ si le premier terme est u_1.

Pour $q \neq 1$,

$$\boxed{1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.}$$

Ainsi, si $u_k = u_0 q^k$, alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1).}$$

3.3 Limites usuelles

Propriété

- Si $q > 1$, alors $q^n \to +\infty$.
- Si $0 < q < 1$, alors $q^n \to 0$.
- Si $q < -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.
- Si $q = -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$, alors $q^n \to 0$.

4 Suites définies par récurrence

4.1 Étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, on cherche souvent à :

1. calculer quelques termes pour comprendre le comportement ;
2. démontrer par récurrence une propriété : positivité, majoration ou minoration ;
3. étudier le sens de variation à l'aide de $u_{n+1} - u_n$;
4. établir la convergence éventuelle de la suite ;
5. si la suite converge vers ℓ et si f est continue (on verra cette notion ultérieurement), résoudre $\ell = f(\ell)$.

Méthode

Pour prouver par récurrence que $u_n \leq M$, on vérifie d'abord l'inégalité au premier rang. Puis on suppose $u_n \leq M$ et on utilise la relation de récurrence pour établir $u_{n+1} \leq M$. Il faut tenir compte du sens de variation de la fonction intervenant dans la relation.

4.2 Exemple : suite croissante et majorée

On définit (u_n) par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{2}.$$

Démontrer que $u_n \leq 6$, que la suite est croissante et qu'elle converge.

Exemple corrigé

1. Majoration par récurrence.
Au rang 0, $u_0 = 1 \leq 6$. Supposons $u_n \leq 6$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{2} \leq \frac{6 + 6}{2} = 6.$$

Donc, par récurrence, $u_n \leq 6$ pour tout $n \geq 0$.
2. Sens de variation.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 6}{2} - u_n = \frac{6 - u_n}{2} \geq 0.$$

La suite est croissante.
3. Convergence. La suite est croissante et majorée par 6 ; elle converge donc vers une limite ℓ.
4. Limite. En passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \frac{\ell + 6}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2\ell = \ell + 6 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ell = 6}.$$

4.3 Exemple : suite décroissante et minorée

On définit (v_n) par

$$v_0 = 10, \qquad v_{n+1} = \frac{v_n + 2}{2}.$$

On montre par récurrence que $v_n \geq 2$. En effet, $v_0 = 10 \geq 2$ et si $v_n \geq 2$, alors

$$v_{n+1} = \frac{v_n + 2}{2} \geq 2.$$

De plus,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2 - v_n}{2} \leq 0.$$

La suite est décroissante et minorée par 2, donc convergente. Sa limite ℓ vérifie

$$\ell = \frac{\ell + 2}{2},$$

d'où $\boxed{\ell = 2}$.

5 Limites et théorèmes de convergence

5.1 Théorème de convergence monotone

Propriété

— Toute suite croissante et majorée converge.

— Toute suite décroissante et minorée converge.

Attention : la monotonie seule ne suffit pas à assurer la convergence. Par exemple, $u_n = n$ est croissante mais tend vers $+\infty$.

5.2 Théorèmes de comparaison

Propriété

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$:

— si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$;

— si $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

Propriété

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si u_n et w_n convergent vers la même limite ℓ, alors $v_n \to \ell$.

5.3 Suite définie par une fonction

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et si (u_n) converge vers ℓ, lorsque f est continue en ℓ, alors

$$\boxed{\ell = f(\ell).}$$

Cette équation donne les limites possibles, mais ne prouve pas à elle seule que la suite converge. Il faut d'abord établir la convergence, par exemple en montrant que la suite est monotone et bornée.

6 Méthode de rédaction au baccalauréat

Pour une question demandant de démontrer une propriété par récurrence, la rédaction type est :

> On considère la propriété $P(n)$: *[énoncé de la propriété]*.
>
> **Initialisation :** pour $n = n_0$, on vérifie que *[calcul montrant que $P(n_0)$ est vraie]*.
>
> **Hérédité :** soit $n \geq n_0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. À l'aide de cette hypothèse, on obtient *[calcul établissant $P(n+1)$]*.
>
> La propriété est donc héréditaire.
>
> **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

7 Exercices d'application

Exercice 1 – Récurrence. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Exercice 2 – Inégalité. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$3^n \geq 2n + 1.$$

Exercice 3 – Suite définie par récurrence. On définit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3.

b) Conjecturer une expression de u_n.

c) Démontrer cette expression par récurrence.

Exercice 4 – Variations et convergence. On définit $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{2}.$$

a) Démontrer par récurrence que $u_n \leq 4$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) Justifier que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5 – Suite géométrique. Une population augmente de 5 % chaque année. Elle compte initialement 12 000 individus.

a) Définir une suite (u_n) modélisant la population après n années.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Déterminer à partir de quelle année la population dépasse 20 000 individus (on pourra utiliser la calculatrice).

À retenir : initialiser, démontrer l'hérédité, conclure.