LYCÉE FRANÇAIS INTERNATIONAL LOUIS-MASSIGNON

Prof. Outouzzalt

Résumé de cours : Polynômes du second degré

Niveau Première

Sept. 2026

1 Définition

Un polynôme du second degré est une fonction de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Vocabulaire : a est le coefficient du terme en x^2, b celui du terme en x et c le terme constant.

2 Forme canonique

Tout polynôme du second degré peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec

$$\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}}.$$

On a également

$$\boxed{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}.$$

3 Discriminant

Pour

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

on définit le discriminant par

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

Le signe de Δ permet de déterminer le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

3.1 Cas $\Delta > 0$

L'équation possède deux solutions réelles distinctes :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

La factorisation est

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

3.2 Cas $\Delta = 0$

L'équation possède une unique solution réelle :

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}.$$

La factorisation est

$$\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2}.$$

3.3 Cas $\Delta < 0$

L'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ne possède aucune solution réelle.

Le polynôme ne se factorise donc pas sur $\mathbb{R}$.

4 Signe d'un polynôme du second degré

Soit

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad x_1 < x_2.$$

Alors :

x	$-\infty$		x_1		x_2
	$+\infty$				
$f(x)$	$\operatorname{sgn}(a)$	0	$-\operatorname{sgn}(a)$	0	$\operatorname{sgn}(a)$

Ainsi :

— si $a > 0$, le polynôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines ;

— si $a < 0$, le polynôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre les racines.

5 Variations

Pour

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

on pose

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

5.1 Si $a > 0$

La fonction est décroissante sur

$$]-\infty, \alpha]$$

puis croissante sur

$$[\alpha, +\infty[.$$

Elle admet un minimum :

$$\boxed{f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}}.$$

5.2 Si $a < 0$

La fonction est croissante sur

$$]-\infty, \alpha]$$

puis décroissante sur

$$[\alpha, +\infty[.$$

Elle admet un maximum :

$$\boxed{f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}}.$$

6 Sommet et axe de symétrie

La forme canonique

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

permet de lire directement le sommet de la parabole :

$$\boxed{S(\alpha, \beta)}$$

avec

$$\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}}, \qquad \boxed{\beta = -\frac{\Delta}{4a}}.$$

L'axe de symétrie est la droite

$$\boxed{x = \alpha}.$$

7 Méthode type

Pour étudier

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

on peut suivre les étapes suivantes :

1. Identifier a, b et c.
2. Calculer le discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac.$$
3. Déterminer les éventuelles racines.
4. Factoriser si $\Delta \geq 0$.
5. Déterminer le signe de f.
6. Calculer le sommet :
$$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$
7. Dresser le tableau de variations.

8 Exemple

Soit

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 6.$$

On a

$$a = 2, \qquad b = -4, \qquad c = -6.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(-6) = 16 + 48 = 64.$$

Comme $\Delta > 0$, il existe deux racines :

$$x_1 = \frac{4-8}{4} = -1, \qquad x_2 = \frac{4+8}{4} = 3.$$

Donc

$$\boxed{f(x) = 2(x+1)(x-3)}.$$

Le sommet a pour abscisse

$$\alpha = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1.$$

Puis

$$f(1) = 2 - 4 - 6 = -8.$$

Ainsi,

$$\boxed{S(1, -8)}.$$

Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut et f admet un minimum égal à -8.