Chapitre 1 : Nombres et calculs

Table des matières

1 Les ensembles de nombres 3
2 Intervalles de $\mathbb{R}$ 4
3 Valeur absolue et distance 5
4 Calcul numérique et priorités opératoires 6
5 Puissances 7
6 Racines carrées 9
7 Écriture scientifique et puissances de 10 10
8 Calcul littéral et fractions algébriques 11
9 Bilan du chapitre 11
10 Exercices de synthèse 12

1 Les ensembles de nombres

1.1. Les principaux ensembles

On utilise différents ensembles pour classer les nombres.

— $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\}$$

— $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\}$$

— $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{b}, \qquad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

— $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels, qui contient notamment les nombres rationnels et les nombres irrationnels.

Les ensembles sont emboîtés :

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Un nombre irrationnel est un nombre réel qui ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers. Par exemple :

$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt{3}, \qquad \pi.$$

Exemple. On a :

$$-5 \in \mathbb{Z}, \qquad \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}, \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

1.2. Appartenance et inclusion

Le symbole $\in$ signifie « appartient à » et le symbole $\notin$ signifie « n'appartient pas à ».

Les symboles $\subset$ et $\not\subset$ permettent de comparer des ensembles.

Exemples :

$$4 \in \mathbb{N}, \qquad -3 \in \mathbb{Z}, \qquad \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}, \qquad \pi \notin \mathbb{Q}.$$

Remarque : un nombre décimal est un nombre qui possède une écriture décimale finie. Tout nombre décimal est rationnel.

Par exemple :

$$2,75 = \frac{275}{100} = \frac{11}{4}.$$

En revanche, $\dfrac{1}{3} = 0,333\ldots$ n'est pas un nombre décimal, même s'il est rationnel.

Exercice d'application 1

Pour chacun des nombres suivants, indiquer le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel il appartient :

$$7\,; \quad -4\,; \quad \frac{5}{3}\,; \quad \sqrt{9}\,; \quad \sqrt{7}\,; \quad -2,5.$$

2 Intervalles de $\mathbb{R}$

2.1. Définition et notation

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de nombres réels compris entre deux bornes, éventuellement infinies.

Intervalle	Inégalité	Description
$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$	Bornes incluses
$]a\,;b[$	$a < x < b$	Bornes exclues
$[a\,;b[$	$a \leq x < b$	a inclus, b exclu
$]a\,;b]$	$a < x \leq b$	a exclu, b inclus
$[a\,;+\infty[$	$x \geq a$	Tous les réels supérieurs ou égaux à a
$]-\infty\,;b]$	$x \leq b$	Tous les réels inférieurs ou égaux à b

Attention. Les bornes infinies ne sont jamais incluses :

$$]-\infty\,;a[, \qquad]a\,;+\infty[.$$

2.2. Traduire une inégalité en intervalle

Exemples :

$$x \geq 3 \iff x \in [3\,;+\infty[$$
$$-2 < x \leq 5 \iff x \in]-2\,;5]$$
$$x < 4 \iff x \in]-\infty\,;4[.$$

2.3. Intersection et réunion

L'intersection de deux ensembles contient les éléments communs aux deux ensembles. On la note $\cap$.

La réunion contient les éléments appartenant à au moins l'un des deux ensembles. On la note $\cup$.

Exemple. Soient

$$A = [-2\,;4] \qquad \text{et} \qquad B = [1\,;6].$$

Alors :

$$\boxed{A \cap B = [1\,;4]}$$

et

$$\boxed{A \cup B = [-2\,;6]}.$$

Autre exemple. Si $A =]-\infty\,;2[$ et $B = [2\,;+\infty[$, alors :

$$A \cap B = \varnothing, \qquad A \cup B = \mathbb{R}.$$

Exercice d'application 2

Écrire sous forme d'intervalles les ensembles définis par :

a) $-3 \leq x < 7$;

b) $x > 2$;
c) $x \leq -1$;
d) $1 < x \leq 8$.

Soient ensuite $A = [-3\,;5]$ et $B = [1\,;7[$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

3 Valeur absolue et distance

3.1. Définition de la valeur absolue

La valeur absolue d'un réel x, notée $|x|$, représente sa distance à zéro sur la droite réelle.

Pour tout réel x :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

Exemples :

$$|5| = 5, \qquad |-5| = 5, \qquad |0| = 0.$$

Attention. La valeur absolue d'un nombre est toujours positive ou nulle.

3.2. Distance entre deux réels

La distance entre deux réels a et b est :

$$\boxed{d(a,b) = |a-b| = |b-a|}.$$

Exemple. La distance entre -3 et 5 est :

$$d(-3,5) = |-3-5| = |-8| = 8.$$

3.3. Équations et inéquations avec valeur absolue

Pour $a \geq 0$:

$$\boxed{|x| = a \iff x = a \text{ ou } x = -a}$$

$$\boxed{|x| < a \iff -a < x < a}$$

$$\boxed{|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a}$$

$$\boxed{|x| > a \iff x < -a \text{ ou } x > a}$$

$$\boxed{|x| \geq a \iff x \leq -a \text{ ou } x \geq a}.$$

Exemple 1 : Résoudre $|x-2| = 5$.

$$|x-2| = 5 \iff \begin{cases} x - 2 = 5, \\ \text{ou} \\ x - 2 = -5. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{S = \{-3\,;7\}}.$$

Exemple 2 : Résoudre $|x-1| < 3$.

$$|x-1| < 3 \iff -3 < x-1 < 3.$$

En ajoutant 1 aux trois membres :

$$-2 < x < 4.$$

Donc :

$$\boxed{S =]-2\,;4[}.$$

Exercice d'application 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $|x| = 7$;
b) $|x+2| = 4$;
c) $|x-3| \leq 2$;
d) $|2x-1| < 5$.

4 Calcul numérique et priorités opératoires

4.1. Ordre des opérations

Pour effectuer un calcul numérique, on respecte l'ordre suivant :

1. les calculs entre parenthèses ;
2. les puissances ;
3. les multiplications et les divisions, de gauche à droite ;
4. les additions et les soustractions, de gauche à droite.

Exemple :

$$A = 3 + 2 \times 5^2.$$

On calcule d'abord la puissance :

$$A = 3 + 2 \times 25 = 3 + 50 = \boxed{53}.$$

Autre exemple :

$$B = (3+2) \times 5^2 = 5 \times 25 = \boxed{125}.$$

4.2. Fractions

Pour $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}, \qquad c \neq 0.$$

Pour additionner deux fractions de dénominateurs différents, on les réduit au même dénominateur.

Exemple :

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\boxed{\frac{23}{12}}.$$

Exemple de simplification :

$$\frac{18}{24}=\boxed{\frac{3}{4}}.$$

Attention. On ne simplifie pas une somme terme à terme :

$$\frac{a+b}{a}\neq\frac{b}{1}$$

en général. La simplification concerne les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, pas les termes d'une somme.

4.3. Développement et factorisation

Les identités suivantes sont fondamentales :

$$\boxed{a(b+c)=ab+ac}$$

$$\boxed{a(b-c)=ab-ac}$$

Les trois identités remarquables sont :

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

$$\boxed{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}.$$

Exemples :

$$(x+3)^2=x^2+6x+9$$
$$(2x-1)^2=4x^2-4x+1$$
$$(3x-2)(3x+2)=9x^2-4.$$

La factorisation consiste à transformer une somme en un produit.

Exemples :

$$5x+15=5(x+3)$$
$$x^2-16=(x-4)(x+4).$$

5 Puissances

5.1. Définition

Pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ facteurs}}.$$

Par convention, si $a \neq 0$:

$$a^0 = 1.$$

Pour $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemples :

$$2^4 = 16, \qquad 10^3 = 1000, \qquad 5^{-2} = \frac{1}{25}.$$

5.2. Règles de calcul

Pour des puissances de même base :

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)}$$

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}.$$

Pour une puissance d'un produit ou d'un quotient :

$$\boxed{(ab)^n = a^n b^n}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)}.$$

Exemples :

$$2^3 \times 2^5 = 2^8$$

$$\frac{7^6}{7^2} = 7^4$$

$$(3^2)^4 = 3^8$$

$$(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 1000.$$

Attention. En général :

$$a^m + a^n \neq a^{m+n}$$

et

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2.$$

Exercice d'application 4

Simplifier les expressions suivantes :

a) $A = 2^4 \times 2^7$;

b) $B = \dfrac{5^8}{5^3}$;

c) $C = (3^2)^5$;

d) $D = 10^{-3} \times 10^7$;

e) $E = \dfrac{2^5 \times 2^{-2}}{2^4}$.

6 Racines carrées

6.1. Définition

Pour tout réel $a \geq 0$, la racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique réel positif dont le carré est a.

Ainsi :

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{pour } a \geq 0}.$$

Exemples :

$$\sqrt{25} = 5, \qquad \sqrt{0} = 0, \qquad \sqrt{2} \approx 1,414.$$

Dans $\mathbb{R}$, la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie.

6.2. Propriétés

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}}$$

et, si $b > 0$:

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}.$$

De plus, pour tout réel x :

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}.$$

Exemples :

$$\sqrt{36 \times 25} = \sqrt{36}\sqrt{25} = 30$$
$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$
$$\sqrt{49x^2} = 7|x|.$$

Attention. On ne peut pas séparer une somme sous une racine :

$$\boxed{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

en général.

Par exemple :

$$\sqrt{9+16} = 5, \qquad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7.$$

6.3. Réduire une expression contenant des racines

On cherche à écrire les racines sous une forme simplifiée.

Exemple :

$$A = 3\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + \sqrt{75}.$$

Or :

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \quad \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

Donc :

$$A = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \boxed{5\sqrt{3}}.$$

Exercice d'application 5

Simplifier :

a) $\sqrt{48}$;
b) $\sqrt{80}$;
c) $2\sqrt{12} + 3\sqrt{27}$;
d) $\sqrt{18} \times \sqrt{8}$;
e) $\sqrt{(2x-1)^2}$.

7 Écriture scientifique et puissances de 10

7.1. Puissances de 10

Pour tout entier naturel n :

$$10^n = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ facteurs}}.$$

On a notamment :

$$10^3 = 1000, \quad 10^2 = 100, \quad 10^1 = 10,$$
$$10^0 = 1, \quad 10^{-1} = 0,1, \quad 10^{-2} = 0,01, \quad 10^{-3} = 0,001.$$

7.2. Écriture scientifique

L'écriture scientifique d'un nombre décimal non nul est :

$$\boxed{a \times 10^n}$$

où $n \in \mathbb{Z}$ et a est un nombre décimal tel que :

$$\boxed{1 \leq |a| < 10}.$$

Exemples :

$$45000 = 4,5 \times 10^4$$
$$0,00072 = 7,2 \times 10^{-4}$$
$$-328000 = -3,28 \times 10^5.$$

7.3. Ordre de grandeur

L'écriture scientifique permet de comparer rapidement des nombres très grands ou très petits.

Par exemple :

$$A = 3,2 \times 10^8, \qquad B = 7,1 \times 10^6.$$

Comme 10^8 est cent fois plus grand que 10^6, on a $A > B$.

Exercice d'application 6

Écrire en notation scientifique :

a) $72\,500\,000$;
b) $0,0000048$;
c) $-0,00325$;
d) $6,4 \times 10^5 \times 10^{-8}$.

8 Calcul littéral et fractions algébriques

8.1. Réduire une expression

Réduire une expression consiste à regrouper les termes semblables.

Exemple :

$$A = 3x + 5 - 2x + 7 = x + 12.$$

Exemple :

$$B = 2(3x - 4) - 5(x + 1).$$

En développant :

$$B = 6x - 8 - 5x - 5 = \boxed{x - 13}.$$

8.2. Quotient et conditions d'existence

Une fraction algébrique est définie lorsque son dénominateur est non nul.

Exemple :

$$A = \frac{x + 2}{x - 3}.$$

Cette expression est définie si et seulement si :

$$x - 3 \neq 0 \iff x \neq 3.$$

Son ensemble de définition est donc :

$$\boxed{D_A = \mathbb{R} \setminus \{3\}}.$$

Exemple de simplification :

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3,$$

à condition que $x \neq 3$.

Même après simplification, la condition $x \neq 3$ reste valable pour l'expression initiale.

Exercice d'application 7

a) Réduire $A = 4x - 3 + 2x + 8$.
b) Développer et réduire $B = 3(2x - 1) - 2(x + 4)$.
c) Factoriser $C = 9x^2 - 25$.
d) Déterminer l'ensemble de définition de $D = \dfrac{2x + 1}{x + 4}$.
e) Simplifier $\dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ en précisant la condition sur x.

9 Bilan du chapitre

Les résultats à retenir

Ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Valeur absolue :

$$|x| \geq 0, \qquad d(a,b) = |a-b|, \qquad \sqrt{x^2} = |x|.$$

Puissances :

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Racines carrées :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0),$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0,\ b > 0).$$

Écriture scientifique :

$$N = a \times 10^n, \qquad 1 \leq |a| < 10.$$

Règle essentielle : toujours vérifier les conditions d'existence avant de simplifier une fraction ou de prendre une racine carrée.

10 Exercices de synthèse

Exercice 1 – Ensembles et intervalles

a) Donner le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ contenant chacun des nombres :

$$-8, \quad 0,125, \quad \sqrt{49}, \quad \sqrt{11}, \quad \frac{7}{3}.$$

b) Écrire sous forme d'intervalle : $-4 \leq x < 3$.

c) Déterminer $[-2\,;5] \cap [1\,;8[$.

Exercice 2 – Calcul numérique

Calculer et donner le résultat sous forme irréductible :

$$A = \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12},$$
$$B = \frac{2^5 \times 2^{-3}}{2^2},$$
$$C = \sqrt{200} - 2\sqrt{18} + \sqrt{8}.$$

Exercice 3 – Calcul littéral

On considère :

$$A = (2x-3)^2 - (x+1)(x-5).$$

a) Développer et réduire A.

b) Calculer A pour $x = 2$.

c) Factoriser $9x^2 - 16$.

Exercice 4 – Valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|2x - 3| = 7,$$

puis :

$$|x + 1| \leq 4.$$

Exercice 5 – Écriture scientifique

a) Écrire $0,0000365$ en notation scientifique.
b) Écrire $8,42 \times 10^7$ sous forme décimale.
c) Calculer et donner en notation scientifique :

$$\frac{(4 \times 10^5)(3 \times 10^{-8})}{6 \times 10^{-2}}.$$